MultiplicityのBifurcationとNewton Boundaryの位相について (微分方程式の幾何学的方法)

岡, 睦雄

数理解析研究所講究録
316 巻 1977 年 41-47

Multiplicity の Bifurcation と Newton boundary の位相について

東大 理　岡 睦雄

A.G. Kouchnirenko は [1] において、次の美しい公式を示した。$V=f^{-1}(0)$ を $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍で正則な函数 $f(z)$ で定義された超曲面で、原点で孤立特異点を持ち、f の Newton 主要部が非退化ならば、f の 0 での Milnor 数 $\mu(f,0)=\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_1,\cdots,z_n\}/\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)$ が多面体 $\Gamma_-(f)$ の "Newton 数" と一致する事を示した。彼の証明は極めて代数的でありベクトル空間 $\mathbb{C}\{z_1,\cdots,z_n\}/\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)$ の階数を "Newton filtration" を使って巧みに計算している。

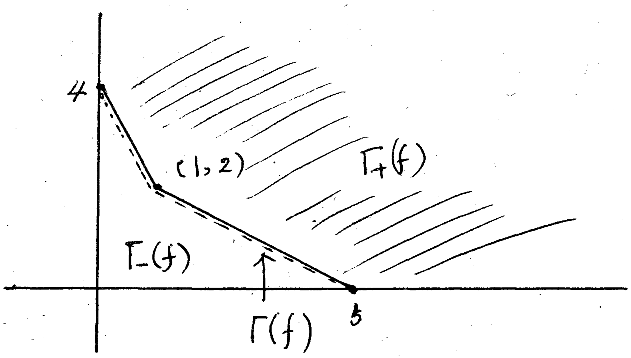
この草稿では $\mu(f,0)$ は Milnor fiber の Middle Betti 数であり、それは連立方程式 $\frac{\partial f}{\partial z_1}=\cdots=\frac{\partial f}{\partial z_n}=0$ の $z=0$ の多重指数でもあるという立場から、幾何的に Bifurcation を用いて、得られる事を示す。

1. 種々の定義（[1], [2] 参照）.

$f(z)=\sum_{\nu} a_\nu z^\nu$ を $z=0$ を中心としたTaylor展開とする。（ν は $\mathbb{Z}^n$ の元であり，$\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$ のとき $z^\nu=z_1^{\nu_1}\cdots z_n^{\nu_n}$）

$a_\nu\neq 0$ なる ν についてその上半空間 $\nu+(\mathbb{R}^+)^n$ をとり，その ν,（$a_\nu\neq 0$）での和集合の凸包を $\Gamma_+(f)$ で表し，そのコンパクトな面で境界に含まれるものの全体を $\Gamma(f)$ で表わし，Newton 境界と呼ぶ。$\Gamma_-(f)$ で $(\mathbb{R}^+)^n-\Gamma_+(f)$ を表す。

例 $f(z)=z_1^5+z_1z_2^2+z_1^2z_2^2+z_2^4$



$\Gamma(f)$ は自然に多面体（$(n-1)$ 次元）になる．Δ を $\Gamma(f)$ の任意の(閉)面とした時，$f_\Delta(z)$ を $\sum_{\nu\in\Delta}a_\nu z^\nu$ で定義する．$f(z)$ が $\Delta\in\Gamma(f)$ で非退化とは $\frac{\partial f_\Delta}{\partial z_1}=\cdots=\frac{\partial f_\Delta}{\partial z_n}=0$ が $(\mathbb{C}^*)^n$ で根を持たない事を示す。f が非退化とは任意の面 $\Delta\in\Gamma(f)$ で f は非退化である時を言う。f の Newton 主要部を $\sum_{\nu\in\Gamma(f)}a_\nu z^\nu$ で定義する.

P が $\mathbb{R}^n$ のコンパクトな多面体の時，Newton 数 $\nu(P)$ を $\sum_{I\subset\{1,2,\dots,n\}}(-1)^{n+|I|}\,n!\,\mathrm{Volume}(P_I)$ で定義する．ただし．$P_I=\{x\in P;\ x_j=0\ \ j\notin I\}$ で，$\mathrm{volume}(P_I)$ は $|I|$ 次元の Euclid の体積。

上の例では $\nu(\Gamma_-(f)) = 14-(5+4)+1 = 6.$

$\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ が $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍から $\mathbb{C}^n$ への解析写像で、$\varphi(0)=0$, $\varphi^{-1}(0)$ の中で 0 が孤立しているとする。その時 $\varepsilon>0$ を十分小さく取り $D_\varepsilon=\{z\in\mathbb{C}^n \mid \|z\|\leq\varepsilon\}$ と $\varphi^{-1}(0)$ の共通部分が 0 のみにできる。その時 方程式 $\varphi_1(z)=\cdots=\varphi_n(z)=0$ の多重指数を $\hat{\varphi}=\varphi/\|\varphi\|: \partial D_\varepsilon \longrightarrow S^{2n-1}$ の写像としての次数で定義する。これを $\mu(\varphi, 0)$ で表す。更に解析写像の解析的族 $\{\varphi_t\}_{0\leq t\leq 1}$ が与えられ，$\varphi_0=\varphi$ で、$\varphi_t^{-1}(0)\cap\partial D_\varepsilon=\phi$ のとき，分岐指数 $Bf(\varphi_t, 0)$ を $\mu(\varphi_0, 0)-\lim_{t\to 0}\mu(\varphi_t, 0)$ で定義する。

2. 以下では $f(z)$ は Newton 主要部が非退化で、$\Gamma(f)$ は各座標軸 $R_i=\{x\in R^n;\ x_j=0\ \ j\neq i\}$ と空でなく交ると仮定しよう。f の原点での多重指数は次の方程式:

$$(M):\ \frac{\partial f}{\partial z_1}=\cdots=\frac{\partial f}{\partial z_n}=0$$

の $\mu(M, 0)$ と一致する。([2]) これを直接計算する代りに、

$$(A):\ z_1\frac{\partial f}{\partial z_1}=\cdots=z_n\frac{\partial f}{\partial z_n}=0$$

を考える。$I\subset\{1,2,\cdots,n\}$ に対して，$f_I(z^I)$ を f の $\mathbb{C}^I=\{z\in\mathbb{C}^n;\ z_j=0\ \text{if}\ j\notin I\}$ とすると、非退化の仮定より容易に f_I も $\mathbb{C}^I$ で孤立特異点を(原点で)持つ事がわかる。

多重指数の加法性より容易に

命題: $\mu(A, 0) = \sum_I \mu(f_I, 0)$, ($\mu(f_\phi, 0) = 1$).

これによって $\mu(A, 0)$ より $\mu(f, 0)$ が求められる.

さて(A)の計算の為に、$\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^n$ を固定して、

(A_t): $z_j \frac{\partial f}{\partial z_j} - t\gamma_j = 0$ $(j = 1, \cdots, n)$

を考えよう. 次の定理が主定理である.

定理1. f の Newton 主要部の係数が一般で, γ が $\Gamma(f)$ に対して一般であれば, B.f. $\mu(A_t, 0) = n!\ \mathrm{volume}\ \Gamma_-(f)$.

しかも $t \neq 0$ が十分小ならば, (A_t) の根は全て単純。

注意. $\forall \Delta \in \Gamma(f)$ に対して, $L(\Delta)$ を Δ の頂点で生成される $\mathbb{C}^n$ の vector space とする。γ が $\Gamma(f)$ に対して一般とは $v_1, \cdots, v_k$ を $\Gamma(f)$ の任意の頂点とし, $\gamma \in L(v_1, \cdots, v_k)$ ならば $\mathrm{rank}(v_1, \cdots, v_k) = n$.

系. $\mu(f, 0) = \mu(M, 0) = \nu(\Gamma_-(f))$.

これは上の定理及び命題より直ちに得られる.

3. 証明の方針及び注意.

A_t の根 $z(t)$ で $z(t) \to 0$, $(t \to 0)$ なるものは, 曲線選択定理より, 解析曲線で表される. それを今

$z(t) = (z_1(s), \cdots, z_n(s))$, $t = s^b$

$z_j(t) = \alpha_j s^{a_j} +$ higher とする. $(j = 1, \cdots, n)$.

$l_a(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ を考える. $I = \{ i \mid z_i(s) \neq 0 \}$.

$l_a | \Gamma(f_I)$ が最大値をとる面を Δ とする。その時 (A_t) に $(z(s), s^{t})$ の最初の項を比べると、次の方程式を得る。

$$\alpha_j \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_j}(\alpha) = \gamma_j \qquad (j=1,\cdots,n)$$

ただし、$\alpha_j = 0$ for $j \notin I$. γ の一般性の仮定より $I = \{1,\cdots,n\}$ で、$\dim\Delta = n-1$ を得る。従って問題は次の2つに分けられる。

(I) $\Delta \in \Gamma(f)$, $\dim\Delta = n-1$ の時、

$$B_\Delta(\gamma): \quad \alpha_j \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_j}(\alpha) = \gamma_j \quad (j=1,\cdots,n)$$

が $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ の方程式として $(\mathbb{C}^*)^n$ に何個の根をもつか。

(II) $B_\Delta(\gamma)$ の解と (A_t) ($\Omega(A)$) の解の対応はどうか。

(I)は難しいが(II)は次の様に明解な回答を与えられる。

今、$m(\Delta)_1 x_1 + \cdots + m(\Delta)_n x_n = d(\Delta)$ を Δ の定義方程式で各 $m(\Delta)_j$ は正の整数とする。

補題：(I) の孤立解を1つ固定（それを α^0 とする）して、α^0 の $B_\Delta(\gamma)$ での多重指数を $\mu(B_\Delta(\gamma), \alpha^0)$ とする。その時 s を十分小さくとれば $\alpha^0(s) = (\alpha_1^0 s^{m(\Delta)_1}, \cdots, \alpha_n^0 s^{m(\Delta)_n})$ の十分近くに $A_{s^{d(\Delta)}}$ の根が多重性をこめて丁度 $\mu(B_\Delta(\gamma), \alpha^0)$ コ存在する：これは写像度に対する Rouché の原理及び f の非退化性より直ちに得られる。（略）。

(I)については次の補題が Key となる答である。

補題: $B_\Delta(\gamma)$ は丁度 $n!\,\mathrm{volume}\,\Delta(0)$ コの単純根をもつ
(ただし係数は一般, $\Delta(0)$ は Δ と原点との cone).

この補題の証明を完全に与えるには紙数が足らないので、省略するが、一番簡単な時の outline を与えておこう. 今 Δ の頂点が丁度 n コでそれを $\nu^1, \cdots, \nu^n$ とする. $f_\Delta(z)=\sum_{j=1}^{n} c_j z^{\nu^j}$ と書ける. この時 $B_\Delta(\gamma)$ は,

$$\begin{pmatrix} \nu_1^1 & \cdots & \nu_1^n \\ \vdots & & \\ \nu_n^1 & \cdots & \nu_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \alpha^{\nu^1} \\ \vdots \\ c_n \alpha^{\nu^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

と書ける. 行列 $M=(\nu_j^i)$ の逆行列を乗ずれば,

$$\begin{pmatrix} c_1 \alpha^{\nu^1} \\ \vdots \\ c_n \alpha^{\nu^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}, \quad ({}^\forall \delta_j \neq 0)$$

と書ける. $d=\det M$ として, $N=d\cdot M^{-1}$ とすれば N は整係数行列で, $\det N = d^{n-1}$. 今変換 $\alpha=\beta^N$ i.e. $\alpha_j=\beta_1^{n_1^j}\cdots\beta_n^{n_n^j}$ を考えれば, $\beta \mapsto \alpha$ は $(\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^n$ の d^{n-1} fold covering map である. 一方上の方程式を β のそれに書きなおすと,

$$\begin{pmatrix} c_1 \beta_1^d \\ \vdots \\ c_n \beta_n^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

明らかにこれは d^n コの単純根をもつ．従って前の方程式は $d^n/d^{n-1}=d$ コの単純根をもつ。$d=n!\,\mathrm{volume}\,\Delta(0)$ であるから，主張はこの場合正しい。

注意．詳細は [3] をみてほしい。

文献．

[1] A.G. Kouchnirenko : Polyhèdres de Newton et nombres de Milnor. Inv. math. 32, (1976)

[2] J. Milnor : Singular points of complex hypersurfaces. Ann of Math. Studies 61. (1968)

[3] M. OKA : On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary, to appear.